

H. Mertens

Der Mohrsche Kreis und Festigkeits- hypothesen für proportionale und nichtproportionale Beanspruchungen

gewidmet Prof. Dr.-Ing. Klaus Federn zum 100. Geburtstag

Mohr's Circle and Equivalent Stress Criteria for proportional and nonproportional Loadings

Inhalt Für proportionale Beanspruchungen gibt es inzwischen eine von der Praxis gut angenommene FKM-Richtlinie zum rechnerischen Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile [9]. Zur Weiterentwicklung dieser Richtlinie und anderer Festigkeitsnachweise für proportionale und nichtproportionale Beanspruchungen besteht noch ein erheblicher Forschungsbedarf, wie Haibach in [7, S. 242 bis 244] ausführt. Insbesondere ist die Invarianz der Betriebsfestigkeitshypothesen gegen Koordinatentransformation für die FKM-Richtlinie nicht gegeben [6]. Die existierenden Methoden oder Hypothesen zur Behandlung solcher Probleme sind sehr rechenzeitintensiv, siehe [7, S. 251 bis 257]. Mit dem vorliegenden Beitrag wird gezeigt, wie mittels der Einführung vorzeichenbehafteter Mohrscher Spannungsinvarianten (Mittelpunkt und Radius) die Invarianz von Festigkeitshypothesen von vornherein gesichert und die Vorzeichenzuweisung zu diesen Festigkeitshypothesen problemangepasst für den Ebenen Spannungszustand (ESZ) organisiert und die Genauigkeit und die Rechenzeit verbessert werden können. Während für die Mittelpunktinvariante die Vorzeichenzuweisung problemlos anfällt, lässt sich diese für die Radiusinvariante nur mit einem ausgeklügelten Vorzeichenalgorithmus sicherstellen. Die Entwicklung dieses Algorithmus wird demonstriert. Mit den beiden vorzeichenbehafteten Invarianten werden sodann Festigkeitshypothesen formuliert, die als Sonderfälle sowohl eine vorzeichenbehaftete Normalspannungshypothese als auch eine vorzeichenbehaftete v.Mises-Hypothese enthalten. An Beispielen werden die Ergebnisse visualisiert und damit der Übergang zu einer relativ einfachen Betriebsfestigkeitsberechnung, die mit einer geeigneten Rainflow-Zählung beginnt, eröffnet.

Abstract For the analytical strength assessment of mechanical machine components with proportional loadings [9] a well accepted FKM-Guideline exists. In order to gain further development for analytical assessment for proportional and non-proportional local stresses further research is needed [7: 242–4]. Especially for the fatigue strength criterion of the FKM-Guideline to coordinate transformations of the stresses [6], since no invariance is given, more information is required. The existing methods or theories solving the problems are very time-consuming [7: 251–7]. With this article it is shown, how it's possible by introducing signed invariants for Mohr's circle (centre and radius of circle), to assure from the beginning the invariance of the fatigue strength criteria in the case of plane stress. The article shows that if the assignment of algebraic sign is problem-adapted, one is able to introduce signed invariants for Mohr's circle and to improve the accuracy and calculating time. While algebraic sign for the centre point invariant is defined easily, the radius invariant is only securely determined by using an advanced algorithm. The development of this algorithm is demonstrated. With the two new time-dependent and signed invariants it is possible to formulate new fatigue strength criteria, which may contain special cases of signed calculation formulas for the normal stress criterion or the von-Mises criterion. With examples the results are visualized, and subsequently opens the transition to a relatively simple analytical fatigue stress assessment, which begins with a suitable rainflow-algorithm.

Autor

Prof. Dr.-Ing. Heinz Mertens
Ehemaliger Leiter des Fachgebiets
Konstruktionslehre im Institut für
Konstruktion, Mikro- und Medizintechnik
Technische Universität Berlin
FG Konstruktion und Produktzuverlässigkeit
Sekt. H66, Straße des 17. Juni 135
10623 Berlin, Tel.: 030/314-26218
E-Mail: heinz.mertens@tu-berlin.de

1 Einleitung

Der Mohrsche Kreis begegnet jedem Studierenden der Ingenieurwissenschaften schon sehr früh im Studium. Er wird bei der Ausbildung meist dazu benutzt, die Studierenden an die Richtungsabhängigkeit der Spannungskomponenten des Spannungstensors nicht nur mathematisch, sondern auch anschaulich heranzuführen. Er dient u. a. dazu die einfachsten *statischen* Festigkeitshypothesen, beispielsweise die Normalspannungs- und die Schubspannungshypothese, mittels des Mohrschen Kreises zu veranschaulichen. Die erweiterte Schubspannungshypothese nach Mohr ist ein weiteres Beispiel, siehe [1, Seite C6]. Im Ingenieuralltag wird der Mohrsche Spannungskreis sehr selten gebraucht, weil die Richtungsabhängigkeit der Spannungskomponenten in den quasistatischen Festigkeitshypothesen implizit berücksichtigt wird. Diese Festigkeitshypothesen sind deshalb *invariant* gegen Koordinatentransformationen, was für FEM-Berechnungen von großem Nutzen ist. Dass der Bezug auf den Mohrschen Kreis auch für die Entwicklung verbesserter invarianter Festigkeitshypothesen für proportionale und nichtproportionale Beanspruchungszeitverläufe, wie sie beispielsweise in Kurbelwellen auftreten, mit Gewinn genutzt werden kann, soll mit diesem Beitrag gezeigt werden. Damit wird ein wesentlich verbesserter Zugang zu einer invarianten Schwingfestigkeitsberechnung, die vom gewählten Koordinatensystem unabhängig ist, erschlossen.

Zur invarianten Formulierung von Festigkeitshypothesen hat der Autor [2] zusammen mit Mitarbeitern [3, 4, 5, 6] erfolgversprechende Invariantenbausteine – auch in Rahmen eines DFG-Forschungsvorhabens – erprobt und unter Einbeziehung des Mohr-

schen Kreises weiterentwickelt. Die Grundzüge dieser neuen Berechnungsmethode werden für den ebenen Spannungszustand (ESZ), aufbauend auf dem Mohrschen Kreis und dessen Spannungs-Invarianten, in diesem Beitrag vorgestellt. Zunächst werden die wesentlichen Hypothesenbausteine für proportionale Beanspruchungen aufbereitet, um den Anschluss an die hierfür erprobte Praxis sicherzustellen, anschließend werden diese für nichtproportionale Beanspruchungen weiterentwickelt. Mit diesen Hypothesenbausteinen werden sodann neue Festigkeitshypothesen formuliert und deren Anwendbarkeit für proportionale Beanspruchungen bestätigt – und schließlich für nichtproportionale Beanspruchungen ausgebaut. Hierzu werden Vergleichsspannungs-Zeitverläufe präsentiert, die den Zugang zu einer relativ einfachen Betriebsfestigkeitsberechnung – auch für nichtproportionale Beanspruchungsverläufe – eröffnen.

Ein zentrales Problem ist der Vorzeichenverlust der v.Mises-Hypothese oder verwandter Hypothesen bei schwingender Beanspruchung. Zur Behebung dieser Schwierigkeit wurden für FEM-Programme Näherungsverfahren konzipiert, mit denen beispielsweise der v.Mises-Hypothese das Vorzeichen und die Richtung der betragsmäßig größten Hauptspannung zugewiesen werden, siehe [7, S. 171]. Bei proportionalen Beanspruchungen ergibt sich eine sinnfällige Ausdeutungsmöglichkeit der betragsmäßig größten Hauptspannung und der Vergleichsspannung, bei nichtproportionalen Beanspruchungen ist weder der zeitliche Ablauf der Hauptspannungen noch der Vergleichsspannung im gewohnten Sinne bewertbar [7, S. 172]. Mit dem vorliegenden Beitrag wird gezeigt, wie mittels der Einführung vorzeichenbehalteter Mohrscher Spannungsinvarianten (Mittelpunkt und Radius) die Invarianz von Festigkeitshypothesen von

vornherein gesichert und die Vorzeichenzuweisung zu diesen Festigkeitshypothesen problemangepasst für den Ebenen Spannungszustand (ESZ) organisiert und gleichzeitig Genauigkeit und Rechenzeit verbessert werden können.

2 Der zeitveränderliche Mohrsche Kreis und seine Spannungs-Invarianten

Ausgangspunkt sei ein Spannungszustand $(\sigma_{x,r}, \sigma_{y,r}, \tau_{xy,r})$ mit den Normalspannungen $\sigma_{x,r}$ und $\sigma_{y,r}$ und der Schubspannung $\tau_{xy,r}$. Dabei wird vorausgesetzt, dass $\sigma_{x,r} > \sigma_{y,r}$ und $\tau_{xy,r} > 0$ sind. Die drei zugehörigen Mohrschen Kreise sind in Bild 1 auf der rechten Seite (Index „r“) dargestellt.

Die dritte Hauptspannung $\sigma_3 = \sigma_z$ ist wegen des ESZ gleich Null. Herausgehoben ist der Mohrsche Kreis, der zur xy-Ebene gehört. Weiter sind die beiden zugehörigen Hauptspannungen $\sigma_{1,r}, \sigma_{2,r}$ die Spannungskomponenten $\sigma_{x,r}, \tau_{xy,r}$ sowie $\Delta\sigma_{xy,r} = (\sigma_{x,r} - \sigma_{y,r})/2$ eingetragen.

Auf der linken Seite (Index „l“) ist der Spannungszustand $(\sigma_{x,l}, \sigma_{y,l}, \tau_{xy,l})$ mit seinem zugehörigen Mohrschen Kreisen zu sehen, dessen Komponenten aus den Komponenten des Spannungszustand $(\sigma_{x,r}, \sigma_{y,r}, \tau_{xy,r})$ durch eine 180°-Drehung um den Ursprung des τ - σ -Koordinatensystems entstanden sind. Formal werden dabei lediglich die Indizes „r“ gegen die Indizes „l“ ausgetauscht. Aus Bild 1 ist abzulesen, dass alle Spannungskomponenten jeweils im Betrag gleich sind, aber einen Vorzeichenwechsel erfahren. Alle vorher positiven Spannungskomponenten werden negativ. Dies gilt auch für $\Delta\sigma_{xy,l} = -\Delta\sigma_{xy,r}$, was anschaulich bereits aus der Richtungsänderung der Pfeilspitze folgt. Einen Vorzeichenwechsel erfährt ebenfalls der Abstand des Mittelpunkts $M_{M,r} = (\sigma_{x,r} + \sigma_{y,r})/2$ des rechten Kreises; er wird zu $M_{M,l} = (\sigma_{x,l} + \sigma_{y,l})/2 = -(\sigma_{x,r} + \sigma_{y,r})/2 = -M_{M,r}$. Um einen konsistenten Berechnungs-Formalismus zu erhalten ist ein derartiger Vorzeichenwechsel auch für den Radius des Mohrschen Kreises R_M anzustreben. Dies gelingt, wenn die Reihenfolge der Hauptspannungen – gegen die üblichen Konvention – auf der linken Seite umgekehrt und $\sigma_{1,l} = -\sigma_{1,r}$ sowie $\sigma_{2,l} = -\sigma_{2,r}$ gesetzt wird. Zunächst gilt $R_{M,r} = (\sigma_{1,r} - \sigma_{2,r})/2$. Durch Indextausch entsteht formal: $R_{M,l} = (\sigma_{1,l} - \sigma_{2,l})/2 = -(\sigma_{1,r} - \sigma_{2,r})/2 = -R_{M,r}$. Der Rechenformalismus, der für die rechte Seite gilt, bleibt so auch für die linke Seite gültig.

Eine Analogie zu der hier benutzten Strategie soll den Einstieg erleichtern. Die Einführung negativer Zahlen in Ingenieurberechnungen ist nichts Ungewöhnliches. Als Beispiel sei an Zahnradberechnungen

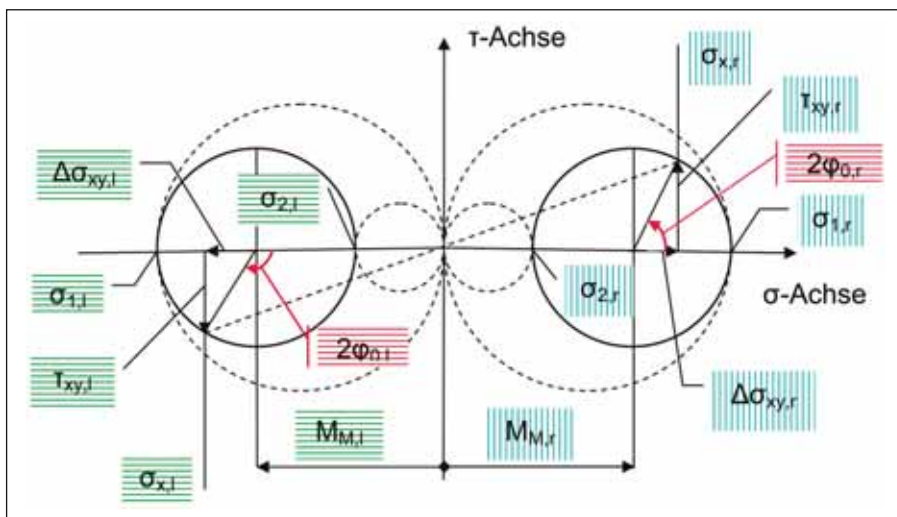


Bild 1

Mohrsche Kreise für zwei antimetrische Spannungszustände

erinnert. Dort lassen sich nämlich sehr viele der Formeln, die für Außenzahnräder gültig sind, auf Innenzahnräder übertragen, wenn die Zähnezahlen der Innenzahnräder negativ definiert werden. Die damit errechneten negativen Zahnradabmessungen lassen sich nur dann in eine Zeichnung eintragen, wenn dabei die negativen Vorzeichen ignoriert werden. Die mit der Einführung einer negativen Zähnezahl erzielte Einheitlichkeit bei der Berechnung von Außen- und Innenzahnrädern ist aus den ökonomischen Gründen nicht zu bestreiten, und es wird sich zeigen, dass ein einheitlicher Formalismus auch bei der Formulierung von Festigkeitshypothesen sehr nützlich ist, wenn dem Mohrschen Kreisradius ein vom zeitabhängigen Spannungszustand abhängiges Vorzeichen zugewiesen wird. Diese Vorgehensweise ähnelt auch der in der Einleitung beschriebenen Vorzeichenzuweisung zur v.Mises-Hypothese.

Zur Entwicklung der vorzeichenbehafteten zeitabhängigen Radien R_M ist es notwendig, die konventionellen Bezeichnungen der Hauptspannungen von den neuen abzugrenzen. Hierzu erhalten die konventionellen Hauptspannungen und auch die aus diesen Hauptspannungen entstehenden Invarianten ein hochgestelltes „o“. Für den ESZ gilt die konventionelle Vereinbarung $\sigma_1 > \sigma_2$. Die neuen Hauptspannungen werden zur Unterscheidung mit σ_1 und σ_2 bezeichnet und die konventionelle Vereinbarung außer Kraft gesetzt, was auch Bild 1 lehrt. Es gilt offensichtlich noch $\sigma_{1,r} > \sigma_{2,r}$, aber $\sigma_{2,l} > \sigma_{1,l}$.

Die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 tauschen bei einer Drehung um 180° , die mit einem formalen Wechsel der Indizes „r“ und „l“ einhergeht, jeweils ihr Vorzeichen; ihre Beträge bleiben erhalten. Da im Mohrschen Kreis der Hauptachsenwinkel φ_0 verdoppelt einzutragen ist, folgt, dass sich bei dem beschriebenen antimetrischen Seitenwechsel die Hauptachsenwinkel $2 \cdot \varphi_{0,r}$ und $2 \cdot \varphi_{0,l}$ um 180° unterscheiden. Gleichzeitig ändert der Mohrsche Radius formal sein Vorzeichen, wie oben gezeigt. Mit dem Vorzeichenwechsel von R_M wechseln σ_1 und σ_2 ihre Reihenfolge auf der σ -Achse. Im 1. Quadranten gilt $\sigma_{1,r} = \sigma_{1,r}^o$ und $\sigma_{2,r} = \sigma_{2,r}^o$, im 3. Quadranten nach Vertauschung der Reihenfolge. $\sigma_{1,l} = \sigma_{2,l}^o$ und $\sigma_{2,l} = \sigma_{1,l}^o$.

Damit ändern sich auch die Berechnungsformeln. Um dies zu zeigen, werden die Indizes r und l durch die Zeitvariable t ersetzt. Als Spannungs-Invarianten werden der zeitveränderliche Mohrsche Radius $R_M = R_M(t)$ und der ebenfalls zeitveränderliche Mittelpunktsabstand des Mohrschen Kreises $M_M = M_M(t)$ eingeführt. Damit lassen sich die zeitabhängigen Hauptspannungen anschreiben:

$$\sigma_1(t) = M_M(t) + R_M(t) \quad (1)$$

$$\text{und } \sigma_2(t) = M_M(t) - R_M(t) \Rightarrow$$

$$M_M(t) = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1(t) + \sigma_2(t)) \quad (2)$$

$$\text{und } R_M(t) = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1(t) - \sigma_2(t)).$$

Mit $\sigma_x(t)$, $\sigma_y(t)$ und $\tau_{xy}(t)$ sowie $\Delta\sigma_{xy}(t) = (\sigma_x(t) - \sigma_y(t))/2$ und der Signum-Funktion nach

$$\text{signum}(x) = 1 \text{ für } x \geq 0 \text{ bzw. } -1 \text{ für } x < 0 \quad (3)$$

ergibt sich, auch wenn $\text{signum}(R_M(t))$ formal noch nicht bekannt ist, zunächst

$$M_M(t) = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x(t) + \sigma_y(t)) \text{ und } R_M(t) = \quad (4)$$

$$= \text{signum}(R_M(t)) \cdot \sqrt{\Delta\sigma_{xy}^2(t) + \tau_{xy}^2(t)}.$$

Die konventionellen Hauptspannungen $\sigma_1^o(t)$ und $\sigma_2^o(t)$ berechnen sich mit dem Mittelpunktsabstand $M_M^o(t)$ und dem Radius des Mohrschen Kreises $R_M^o(t)$ zu

$$M_M^o(t) = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x(t) + \sigma_y(t)) \quad (5)$$

$$\text{und } R_M^o(t) = \sqrt{\Delta\sigma_{xy}^2(t) + \tau_{xy}^2(t)} \Rightarrow$$

$$\sigma_1^o(t) = M_M^o(t) + R_M^o(t) \quad (6)$$

$$\text{und } \sigma_2^o(t) = M_M^o(t) - R_M^o(t).$$

Der Vorzeichenverlust durch das Wurzelziehen in Gl. (5) wird in Gl. (6) mit eingetragen. Der Unterschied ist markant: Mit Gl. 5 geht gegenüber Gl. (4) die zeitliche Zuordnung des Vorzeichens von $R_M(t)$ verloren. Beim ersten Blick auf Bild 1 geschieht durchaus dasselbe. Aber der Blick auf die eingezeichneten, einander entgegengesetzten Vektorpfeile der Spannungskomponenten $\Delta\sigma_{xy,r}$ und $\Delta\sigma_{xy,l}$, bzw. $\tau_{xy,r}$ und $\tau_{xy,l}$ macht den jeweiligen Vorzeichenwechsel sichtbar.

Aus den Gln. (1) und (6) folgt nach Umrechnung, dass die zeitveränderlichen Mittelpunktsabstände M_M und M_M^o sowie Radien R_M und R_M^o unabhängig vom gewählten x-y-z-Koordinatensystem sind, da sie durch zeitveränderliche Hauptspannungen ausgedrückt werden, die für alle x-y-z-Koordinatensysteme mit synchronisierten Uhren zu jedem Zeitpunkt gleich sind – sie sind invariant. Für die einzelnen Spannungskomponenten gilt das nicht, was gerade der Mohrsche Kreis verdeutlicht.

Fazit: Die definierten zeitabhängigen Spannungen M_M und M_M^o sowie R_M und R_M^o sind die zeitabhängigen Spannungs-Invarianten des Mohrschen Kreises, die durch die Spannungskomponenten $\sigma_x(t)$, $\sigma_y(t)$ und $\tau_{xy}(t)$ bestimmt sind; die dritte Hauptspannung $\sigma_3(t) = \sigma_z(t) = 0$. M_M und R_M eignen sich besser zur Formulierung von Schwingfestigkeitshypothesen, was weiter unten ge-

zeigt wird. M_M^o und R_M^o eignen sich wegen des Vorzeichenverlustes eher für quasi-statische Problemstellungen oder Sonderfälle bei proportionalen Beanspruchungen. Die wichtigste Frage wird nun sein, wie die in Gl. 4 eingeführte $\text{signum}(R_M(t))$ eindeutig festgelegt werden kann. Hierzu sind problemangepasst die Radien der zeitveränderlichen Mohrschen Kreise mit dem Verhalten der Spannungskomponenten zu verknüpfen und gleichzeitig jede Mehrdeutigkeit durch eine geschickte Wahl des Koordinatensystems (x, y, z) auszuschließen.

3 Einstiegsszenario

Bevor verbesserte Schwingfestigkeitshypothesen formuliert werden können, muss gezeigt werden, wie die definierten zeitveränderlichen Spannungs-Invarianten für einen konkreten Schwingungsvorgang ($\sigma_x(t)$, $\sigma_y(t)$, $\tau_{xy}(t)$) ermittelt werden können. Es wird – von Sonderfällen abgesehen – angenommen, dass die zeitveränderlichen Spannungskomponenten in tabellarischer Form vorliegen und mittels einer linearen Finite-Elemente- oder Randelemente-Berechnung (FE- oder RE-Programm) vorher berechnet wurden. Eine direkte Kopplung dieser Programme mit einem Mehrkörpersimulationsprogramm (MKS-Programm) erweist sich als sehr vorteilhaft [8].

4 Vereinbarungen

Um im Rahmen dieser Veröffentlichung allzu vieler Indizes zu vermeiden, und um zu einer eindeutigen Berechnungsstrategie zu gelangen, werden folgende Vereinbarungen eingeführt:

1. Die Spannungsverläufe ($\sigma_x(t)$, $\sigma_y(t)$, $\tau_{xy}(t)$) werden auf ein Arbeitsspiel, bzw. eine periodische Wiederholperiode, eines mittelspannungsfreien periodischen Schwingungsvorgangs begrenzt. Dies erfordert zunächst, dass die Mittelspannungen aus den mittelspannungsbehafteten Spannungskomponenten entfernt werden, wie dies auch beispielsweise von der üblichen Dauerfestigkeitsberechnung her bekannt ist. Alle Spannungskomponenten nehmen daher im Zeitablauf sowohl positive als auch negative Werte an, es sei denn, dass eine Komponente dauernd Null ist.

2. Es wird in diesem Beitrag vorerst angenommen, dass innerhalb eines Arbeitsspiels der Maximalwert $\sigma_{1,max}^o = \sigma_1^o(t_0)$ nur einmal auftritt. Der zugehörige Zeitpunkt t_0 wird als Referenzzeitpunkt eingeführt. Die zugehörigen Spannungskomponenten sind $\sigma_x(t_0)$, $\sigma_y(t_0)$, $\tau_{xy}(t_0)$; sie definieren den Referenzpunkt 0.

3. Dieser Referenzpunkt 0 soll im 1. Quadranten entsprechend Bild 1 liegen. Weiterhin soll gelten, das gilt: $\Delta\sigma_{xy}(t_0) = (\sigma_x(t_0)$

– $\sigma_y(t_0)/2 \geq 0$. Um dies zu erreichen, müssen $\sigma_x(t_0) \geq 0$, $\sigma_x(t_0) \geq \sigma_y(t_0)$ sowie $\tau_{xy}(t_0) \geq 0$ sein. Zum Zeitpunkt t_0 soll dem Radius des Mohrschen Kreises $R_M(t_0)$ ein positiver Wert zugewiesen werden.

4. Sind die Vereinbarungen zu 3.) nicht erfüllt, so sind die Koordinatenachsen x-y-z solange zu vertauschen, bis die Vereinbarungen zu 3.) erfüllt sind. Dies ist immer möglich. Ist $\Delta\sigma_{xy}(t_0)$ negativ, so sind – ohne Einschränkung der Allgemeinheit – alle tabellierten Originalwerte von $\sigma_x(t)$ der Spalte $\sigma_y(t)$ zuzuweisen und im Gegenzug alle Originalwerte von $\sigma_y(t)$ der Spalte $\sigma_x(t)$. Ist $\tau_{xy}(t_0)$ negativ, so sind die tabellierten Originalwerte $\tau_{xy}(t)$ nach Multiplikation mit (-1) mit den geänderten Vorzeichen der Spalte $\tau_{xy}(t)$ zurückzugeben.

Hinweis: Die Radien und Mittelpunkte aller Mohrschen Kreise ändern sich bei diesen Vertauschungen nicht. Dies lässt sich direkt mit dem Mohrschen Kreis nachweisen.

5. Ausgeschlossen werden hier die Sonderfälle, dass entweder $\Delta\sigma_{xy}(t_0)$ oder $\tau_{xy}(t_0)$ oder gar beide zu Null werden; in diesen Fällen ist als Referenzpunkt 0 der numerische benachbarte Zeitpunkt ($t_0 \pm \Delta t$) zu nehmen, für den die beiden Spannungswerte im 1. Quadranten liegen.

5 Bestimmung der Spannungs-Invarianten für proportionale Beanspruchungen

Bei proportionalen Beanspruchungsverhältnissen stehen die einzelnen Spannungskomponenten $\sigma_x(t)$, $\sigma_y(t)$ und $\tau_{xy}(t)$ in einem festen Verhältnis zueinander. Es wird angenommen, dass die unter Abschnitt 4 formulierten Vereinbarungen erfüllt sind. Diese Vereinbarungen führen bereits bei proportionalen Beanspruchungen zu übersichtlichen Verhältnissen. Damit treten die Maxima der Spannungskomponenten $\sigma_{x,max} = \sigma_x(t_0)$, $\sigma_{y,max} = \sigma_y(t_0)$ und $\tau_{xy,max} = \tau_{xy}(t_0)$ zum selben Zeitpunkt t_0 auf, sie bestimmen den größten Mohrschen Kreis. $\sigma_{x,max}$ und $\tau_{xy,max}$ liegen im 1. Quadranten. Zur Formulierung der Zeitabhängigkeit der Spannungskomponenten wird eine dimensionslose stetige Last-Zeit-Funktion $f(t)$ eingeführt. Die Periodendauer der Wiederholperiode sei mit T gekennzeichnet. Dann gilt: $f(t + T) = f(t)$. Im Referenzzeitpunkt t_0 soll $f(t_0)$ den Maximalwert Eins annehmen, damit gilt: $f(t_0) = 1$. Der arithmetische Mittelwert von $f(t)$ ist Null, entsprechend den Vereinbarungen in Abschnitt 4. Damit lassen sich die Spannungskomponenten anschreiben:

$$\sigma_x(t) = \sigma_x(t_0) \cdot f(t) \text{ und } \sigma_y(t) = \sigma_y(t_0) \cdot f(t) \text{ sowie } \tau_{xy}(t) = \tau_{xy}(t_0) \cdot f(t). \quad (7)$$

Die zeitabhängigen Spannungs-Invarianten lauten mit $\Delta\sigma_{xy}(t) = (\sigma_x(t) - \sigma_y(t))/2$:

$$M^o_M(t) = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x(t_0) + \sigma_y(t_0)) \cdot f(t) \quad (8)$$

$$\text{und } R^o_M(t) = |f(t)| \cdot \sqrt{\Delta\sigma_{xy}^2(t_0) + \tau_{xy}^2(t_0)}.$$

Weiter gilt wegen $R^o_M(t) \geq 0$

$$M_M(t) = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x(t_0) + \sigma_y(t_0)) \cdot f(t) \quad (9)$$

$$\text{sowie } R_M(t) = \text{signum}(f(t)) \cdot R^o_M(t).$$

Die letzte Formel bedarf noch einer Begründung. Generell gilt: $f(t) = \text{signum}(f(t)) \cdot |f(t)|$, sodass mit Gl. (8) gilt: $R_M(t) = \text{signum}(f(t)) \cdot |f(t)| \cdot \sqrt{\Delta\sigma_{xy}^2(t_0) + \tau_{xy}^2(t_0)}$. Es bleibt also nur noch zu begründen, warum die Zuweisung $\text{sign}(R_M(t)) = \text{signum}(f(t))$ sinnvoll ist.

Begründung 1: Wegen der Proportionalität der Spannungen von $\sigma_x(t)$, $\sigma_y(t)$ und $\tau_{xy}(t)$ ist auch $\Delta\sigma_{xy}(t)$ zu $\tau_{xy}(t)$ proportional, zusätzlich gehen alle Spannungsverläufe zu jeweils denselben Zeitpunkten durch die Nulllinie. Unter der gemachten Vereinbarung, dass die Spannungsverläufe so umgeordnet wurden, dass $\sigma_{x,max} = \sigma_x(t_0)$, $\sigma_{y,max} = \sigma_y(t_0)$ und $\tau_{xy,max} = \tau_{xy}(t_0)$ gilt, folgt unmittelbar: a) „Wenn $\Delta\sigma_{xy}(t) \geq 0$, dann ist auch $\tau_{xy}(t) \geq 0$ “ und folglich $\text{signum}(f(t)) = 1$ “ sowie b) „Wenn $\Delta\sigma_{xy}(t) < 0$, dann ist auch $\tau_{xy}(t) < 0$ “ und folglich $\text{signum}(f(t)) = -1$ “. $R_M(t)$ werden damit die gewünschten Schwingungseigenschaften der Spannungskomponenten zugewiesen, was ohne die Vereinbarung 3.) und 4.) nicht automatisch gilt, nur mitunter zufällig. Die obige Zuweisung ist also sinnvoll.

Begründung 2: Da eine solche einfache Argumentation bezüglich der Vorzeichenzuweisung bei nichtproportionalen Beanspruchungen nicht mehr alleine weiterführt, wird noch eine stärker mathematisch orientierte Möglichkeit für proportionale Beanspruchungen angegeben, die einen anderen Zugang zu der Problematik der Vorzeichenzuweisung eröffnet. Für diese Begründung wird auf die Hauptachsenrichtungen des zeitlich veränderlichen Spannungszustandes Bezug genommen. Die beiden Hauptachsenwinkel ϕ_0 lassen sich, wie allgemein bekannt, u. a. [1, Seite C2], mittels der folgenden Gleichung berechnen:

$$\tan(2 \cdot \phi_0(t)) = \frac{\tau_{xy}(t)}{\Delta\sigma_{xy}(t)} \quad (10)$$

und für proportionale Beanspruchungen umrechnen

$$\tan(2 \cdot \phi(t)) = \frac{\tau_{xy}(t_0) \cdot \text{sign}(f(t)) \cdot |f(t)|}{\Delta\sigma_{xy}(t_0) \cdot \text{sign}(f(t)) \cdot |f(t)|} = \frac{\tau_{xy}(t_0) \cdot \text{sign}(f(t))}{\Delta\sigma_{xy}(t_0) \cdot \text{sign}(f(t))}. \quad (11)$$

Es ist nicht zu empfehlen, die Zeitfunktionen $\text{sign}(f(t))$ in (11) wegzukürzen, da sich andernfalls die Doppeldeutigkeit des

Drehwinkels ϕ_0 nicht beheben lässt. Dass beim Passieren der Nulllinie die Hauptachsenrichtungen einen Platztausch vollziehen, bliebe dann unentdeckt.

Mathematisch lässt sich dieser Platztausch mit der atan2-Funktion sichtbar machen. Diese Funktion übergibt den Winkel zwischen der σ -Achse und einer Geraden mit dem Ursprung (0,0) und dem Punkt $(\Delta\sigma_{xy}(t), \tau_{xy}(t))$. Erläuterung: Es sei entsprechend Bild 1 rechts $\Delta\sigma_{xy,r} = 100$ MPa und $\tau_{xy,r} = 30$ MPa, somit gilt: $\phi_{0,r} = 1/2 \cdot \text{atan2}(100, 30) = 8,35^\circ$. Für Bild 1 links gilt dann: $\Delta\sigma_{xy,l} = -100$ MPa und $\tau_{xy,l} = -30$ MPa., also $\phi_{0,l} = 1/2 \cdot \text{atan2}(-100, -30) = -81,65^\circ$. Damit wird $\phi_{0,r} - \phi_{0,l} = 90^\circ$ – oder verdoppelt – wie in Bild 1 – 180° . Weiter gilt: $\text{signum}(\phi_{0,r}) = +1$ und $\text{sign}(\phi_{0,l}) = -1$.

Allgemein gilt mit den Vereinbarungen nach Abschnitt 4 für proportionale Beanspruchungen:

$$\phi_{0,r} = \text{konstant, und } \phi_{0,l} = \phi_{0,r} - \pi/2 \text{ sowie } \text{sign}(\phi_{0,r}) = +1 \text{ und } \text{sign}(\phi_{0,l}) = -1. \quad (12)$$

Fazit: Der Hauptachsenwinkel ϕ_0 springt beim Überqueren der Nulllinie um einen Betrag von 90° . Der zugehörige Vorzeichenwechsel von ϕ_0 kann auf den Vorzeichenwechsel von R_M bei proportionaler Beanspruchung übertragen werden. $\text{sign}(R_M) = \text{sign}(\phi_0)$ erweist sich auch hier als sinnvoll. Die x-Achse und die y-Achse wechseln bei $\Delta\sigma_{xy} = \tau_{xy} = 0$ gleichsam ihre Plätze und sonst nicht.

Beispiel 1: Für $f(t)$ wird wegen deren Einfachheit eine Sinusfunktion gewählt. Statt der Zeitkoordinate t wird die Zeitvariable $\eta = \omega \cdot t$ eingeführt, also $f(t) = \sin(\eta)$. Die Wiederholperiode wird durch $(0 \leq \eta < 2\pi)$ begrenzt. Das Maximum der Sinusfunktion liegt bei $\eta_0 = \pi/2$. Die als positiv vorausgesetzten Maximalwerte bei η_0 seien σ_{xa} , σ_{ya} , τ_{xya} und $\Delta\sigma_{xya} = 1/2 \cdot (\sigma_{xa} - \sigma_{ya})$. Zahlenwerte: $\sigma_{xa} = 400$ MPa, $\sigma_{ya} = 100$ MPa und $\tau_{xya} = 400$ MPa. Damit errechnet sich $\Delta\sigma_{xya} = 150$ MPa. Der maximale Radius bei proportionalen Beanspruchungen $R_{M,max}$ beträgt damit $R^o_{M,max} \approx 427$ MPa.

Die Spannungskomponenten lauten dann mit Gl. 7

$$\sigma_x = \sigma_{xa} \cdot \sin \eta; \sigma_y = \sigma_{ya} \cdot \sin \eta, \tau_{xy} = \tau_{xya} \cdot \sin \eta \text{ und } \Delta\sigma_{xy} = \Delta\sigma_{xya} \cdot \sin \eta. \quad (13)$$

Gl. 12 gilt sinngemäß. Die x- und die y-Achse wechseln ihre Plätze, wenn $\sin(\eta) = 0$ wird. Die Mittelpunktsabstände der Mohrschen Kreise ergeben sich zu

$$M^o_M(\eta) = M_M(\eta) = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{xa} + \sigma_{ya}) \cdot \sin(\eta) \quad (14)$$

Die Radien der Mohrschenkreise betragen

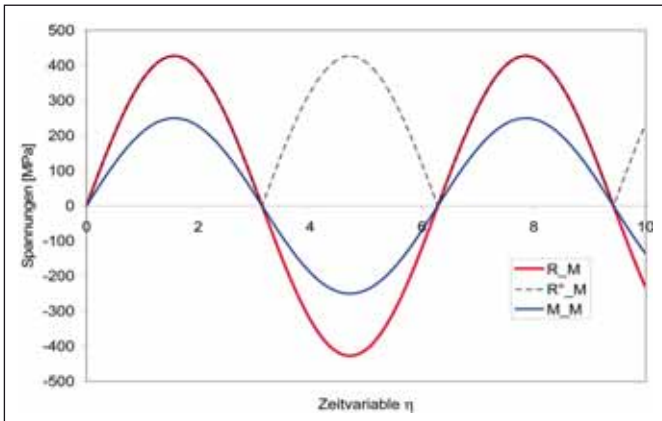


Bild 2

Invarianten des Mohrschen Kreises. Radien R_M und R_M^o sowie Mittelpunkte M_M in Abhängigkeit von der Zeitvariablen $\eta = \omega \cdot t$

$$R_M^o(\eta) = |\sin(\eta)| \cdot \sqrt{\Delta\sigma_{xya}^2 + \tau_{xya}^2} \quad (15)$$

und $R_M(\eta) = \sin(\eta) \cdot \sqrt{\Delta\sigma_{xya}^2 + \tau_{xya}^2}$.

Die Radien R_M^o und R_M sowie M_M werden für etwas mehr als eine Wiederholperiode in Abhängigkeit von η in Bild 2 wiedergegeben.

Fazit: Es wird deutlich, dass M_M das Schwingungsgeschehen der einzelnen Spannungskomponenten vorzeichengerecht, also sinusförmig wiedergibt, dagegen R_M^o (gestrichelte Kurve) nicht. Für R_M^o verdoppelt sich sogar die Frequenz der Spannungskomponenten. Werden nun die Bereiche von R_M^o mit $\sin(\eta) < 0$ nach unten geklappt, so erhält man die richtigen Schwingungseigenschaften, die mit denen der Spannungskomponenten übereinstimmen, also insgesamt $R_M(\eta)$. Der beschriebene *virtuelle Klappprozess* reaktiviert also in richtiger Weise die durch Quadrieren und anschließendes Wurzelziehen verlorengegangenen Vorzeichen der Spannungskomponenten. Die bekannten Schwierigkeiten mit dem Vorzeichenverlust bei der Durchführung von Schwingfestigkeitsberechnungen jeder Art (deterministisch und stochastisch) können damit bei proportionalen Beanspruchungen generell aus dem Weg geräumt werden.

Die Einfachheit der Vorzeichenzuweisung für $R_M(\eta)$ – bei Beachtung der Vereinbarungen nach Abschnitt 4 – ermutigt, auch einen gangbaren Weg zur Bestimmung zur Vorzeichenzuweisung für nichtproportionale Beanspruchungen zu suchen.

6 Bestimmung der Spannungs-Invarianten bei nichtproportionalen Beanspruchungen

6.1 Phasenverschobene harmonische Schwingbeanspruchungen

Aufgabenstellung: In einem ersten Schritt wird ein einfacher nichtproportionaler

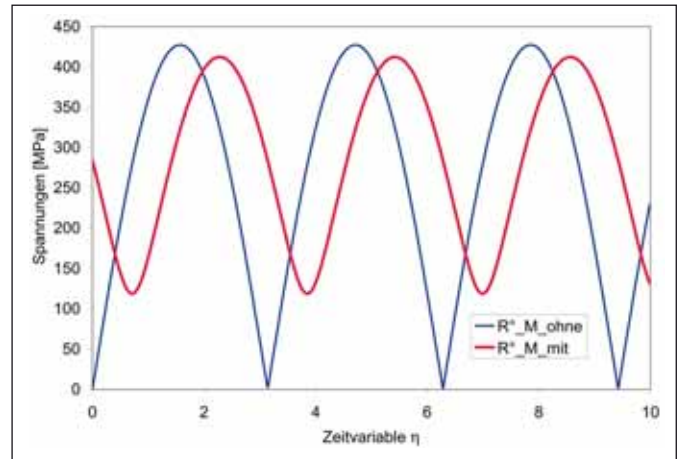


Bild 3

Der Radius R_M^o ohne und mit Phasenverschiebungen in Abhängigkeit von der Zeitvariablen η für Beispiel 1 und 2

Schwingungsvorgang betrachtet, der auch schon in [2, 4] Gegenstand theoretischer Untersuchungen war. Die zeitveränderlichen Spannungskomponenten hierfür lauten

$$\begin{aligned} \sigma_x(t) &= \sigma_{xa} \cdot \sin(\omega t + \delta_x) \\ \sigma_y(t) &= \sigma_{ya} \cdot \sin(\omega t + \delta_y) \\ \tau_{xy}(t) &= \tau_{xya} \cdot \sin(\omega t + \delta_{xy}), \end{aligned} \quad (16)$$

mit den Phasenverschiebungen $\delta_x = 0$, δ_y und δ_{xy} sowie der Winkelgeschwindigkeit ω . Zur Vereinfachung wird die Zeitvariable $\eta = \omega \cdot t$ statt t benutzt. Mit Ausnahme von Sonderfällen haben die phasenverschobenen Spannungskomponenten keine gemeinsamen Nulldurchgänge mehr.

Der Radius R_M^o des Mohrschen Kreises wird dann an keiner Stelle mehr zu Null. Dies wird für Beispiel 2 in Bild 3 gezeigt, in dem der zeitveränderliche Radius für eine nichtproportionale Beanspruchung als rote Kurve dargestellt ist. Dem Verlauf von R_M^o mit Phasenverschiebungen, kurz $R_M^o_{mit}$, wird im Bild 3 der Verlauf von R_M^o ohne Phasenverschiebungen, kurz $R_M^o_{ohne}$, nach Beispiel 1 gegenübergestellt. **Beispiel 2:** $\sigma_{xa} = 400$ MPa, $\sigma_{ya} = 100$ MPa und $\tau_{xya} = 400$ MPa sowie $\delta_x = 0$, $\delta_y = -\pi/8$ und $\delta_{xy} = -\pi/4$.

Die Spannweite der Radien der Mohrschen Kreise $R_M^o_{mit}$ wird kleiner als die der Radien von $R_M^o_{ohne}$. Die Schwingfrequenz ist gegenüber der Frequenz der Spannungskomponenten verdoppelt. Der minimale Radius von $R_M^o_{mit}$ erreicht die Nulllinie nicht mehr. Die Minima und Maxima von $R_M^o_{mit}$ und $R_M^o_{ohne}$ sind gegeneinander phasenverschoben. Um die Frequenzverdoppelung durch ein Herunterklappen der vom Vorzeichenverlust betroffenen Kurvenbereiche rückgängig machen zu können, ist – ähnlich wie bei proportionaler Beanspruchung – ein *virtueller Klappprozess* erforderlich.

Klappprozess mit Sprungstellen. Zum leichteren Verständnis des virtuellen Klappprozesses soll das graphische Ergebnis des entwickelten Vorzeichen-Algorithmus für

Beispiel 2 vorweggenommen werden. Die zugehörigen Berechnungen wurden mit Mathcad 12 durchgeführt. Der Verlauf von $R_M = R_M(\eta)$ wird in Bild 4 durch die rote Kurve präsentiert.

In Bild 4 ist auch mit gestrichelter Linie der ursprüngliche Verlauf von $R_M^o = R_M^o(\eta)$ eingetragen. Der Vorzeichenalgorithmus gibt die Erwartungen wieder, die sich mit Bild 3 aufdrängen. Zwar erreicht das Minimum von $R_M^o = R_M^o_{mit}$ die Nulllinie nicht mehr, jedoch der dicht danebenliegende Verlauf von $R_M^o_{ohne}$, für den bereits ein geeigneter Vorzeichenalgorithmus gefunden wurde, wie Bild 2 zeigt. Der zugehörige Klappprozess von $R_M^o_{mit}$ sollte wegen der Nähe zu $R_M^o_{ohne}$ zumindest gewisse Ähnlichkeiten zu letzterem aufweisen – und aufgrund der vielfältigen Symmetrien von R_M^o wird er im Minimum von R_M^o zu erwarten, was der Algorithmus auch liefert. Der (virtuelle) Klappprozess erzeugt (virtuelle) Sprünge, die die heruntergeklappten Kurvenbereiche mit den festbleibenden Kurvenbereichen verbinden. Diese Sprünge resultieren gerade aus der Tatsache, dass $R_M^o_{min}$ die Nulllinie nicht mehr erreicht.

Durch die in Abschnitt 4 getroffenen Vereinbarungen ist gesichert, dass zumindest das Maximum von σ_1 gemäß Bild 1 im 1. Quadranten der σ - τ -Ebene von Bild 1 liegt. Wegen der Antimetrie der Gln. (16) liegen die Minima naturgemäß im 3. Quadranten. Ein Spannungspfad von R_M muss in einer σ - τ -Ebene durch alle vier Quadranten gehen, da es keine Nullstellen gibt. Er muss Sprungstellen besitzen, da nach einer Wiederholperiode ein geschlossener Kurvenzug entstehen muss.

Aber welcher Art sind diese Sprünge? Die Antwort wurde kurz vor Gleichung (1) vorbereitet. Wie dort ausgeführt, wechseln im 3. Quadranten der σ - τ -Ebene die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 bezogen auf den 1. Quadranten ihre Reihenfolge. Anschaulich gesprochen folgt beispielsweise σ_1 im 3.

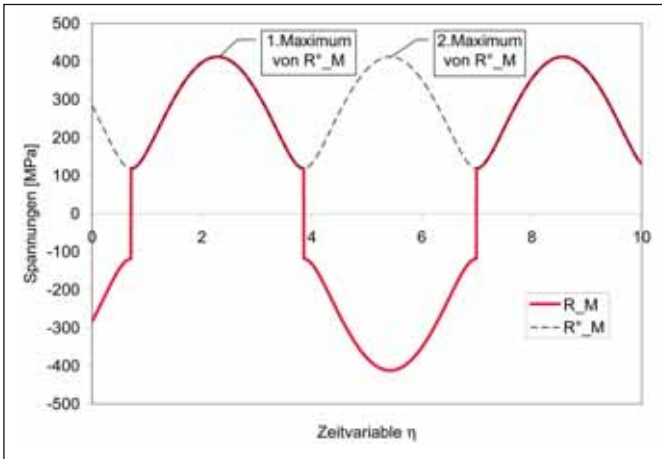


Bild 4

Der virtuelle Klappprozess $R_M^\circ(\eta) = R_M(\eta)$ zur Vorzeichenzuweisung

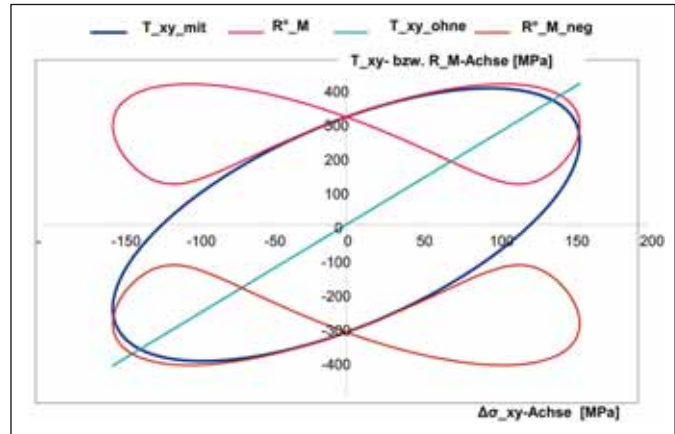


Bild 5

Vergleich der Spannungspfade τ_{xy_mit} , τ_{xy_ohne} , R_M° und $R_M^\circ_{neg}$ in Abhängigkeit von $\Delta\sigma_{xy}(\eta)$.

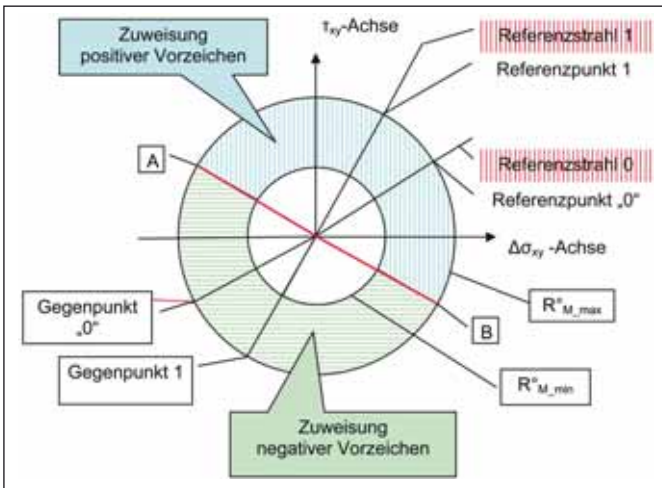


Bild 6

Konzept zur Vorzeichenzuweisung

Quadranten nicht mehr dem Pfad von σ_1° , sondern dem Pfad von σ_2° – und gleichzeitig folgt σ_2 nicht mehr dem Pfad von σ_2° , sondern dem Pfad von σ_1° . Jede Sprungstelle ist Ausdruck des zugehörigen Hauptachsenwechsels.

Physikalische Deutung:

- Durch eine Sprungstelle wird bei nichtproportionaler Beanspruchung ein Hauptachsenwechsel visualisiert.
- Hauptachsenwechsel treten auch bei proportionalen Beanspruchungen auf – wie im vorhergehenden Abschnitt mit Gl. 12 gezeigt wird. Sie werden nur nicht sichtbar, siehe Bild 2, weil an diesen Stellen jeweils Nulldurchgänge liegen.

Konzept des Klappprozesses. Die atan2-Funktion hilft bei der Suche nach einem geeigneten Vorzeichenalgorithmus nicht unmittelbar weiter, da die Spannungsverläufe von $\Delta\sigma_{xy}$ und τ_{xy} nicht mehr gleichzeitig durch Null gehen und die Hauptachsenrichtungen $2\phi_0(\eta)$ nicht mehr mit jeweils

konstanter Neigung durch den 1. und 3. Quadranten verlaufen. Bei nichtproportionalen Beanspruchungen liegen die Spannungspunkte $\Delta\sigma_{xy}(\eta)$ und $\tau_{xy}(\eta)$ in allen vier Quadranten. Dies ist besonders deutlich zu erkennen, wenn alle durchlaufenen Spannungspunkte ($\Delta\sigma_{xy}$, τ_{xy}) in einem gemeinsamen Bild aller Mohrschen Kreise zusammengefasst werden. Für Beispiel 2 wird dies u. a. in Bild 5 für die Schubspannung mit Phasenverschiebungen τ_{xy_mit} (blau) gezeigt.

Offensichtlich liegen alle Spannungspunkte $\tau_{xy_mit} = f(\Delta\sigma_{xy})$ nicht mehr auf einer Geraden, wie bei einer entsprechenden proportionalen Beanspruchung ohne Phasenverschiebung τ_{xy_ohne} (grün), sondern auf einem geschlossenen ellipsenförmigen Spannungspfad. Der nicht eingezeichnete Hauptachsenwinkel $2\phi_0$, der mit der atan2-Funktion berechnet werden kann, ändert fortgesetzt seine Richtung. Er überstreicht einen Winkel von 360° – also einen vollen Umlauf. Zu jedem Spannungspunkt ($\Delta\sigma_{xy}$, τ_{xy_mit}) gehört ein Gegenpunkt ($-\Delta\sigma_{xy}$, $-\tau_{xy_mit}$) mit entgegengesetzten Vorzeichen

der Spannungskomponenten. In Bild 5 ist weiter der zu τ_{xy_mit} gehörende Spannungspfad $R_M^\circ = f(\Delta\sigma_{xy})$ (rot) dargestellt. Der Pfad R_M° schmiegt sich teilweise im 1. und 2. Quadranten an den Pfad τ_{xy_mit} an, an anderen Stellen entfernt er zum Teil deutlich.

Ein antisymmetrisches Verhalten zeigt der negative Spannungspfad $R_{M_neg}^\circ(\Delta\sigma_{xy}) = -R_M^\circ(\Delta\sigma_{xy})$, der für das verlorene Vorzeichen vom R_M° steht. Der Pfad $R_{M_neg}^\circ$ schmiegt sich teilweise an den Pfad τ_{xy_mit} an, aber jetzt im 3. und 4. Quadranten. Da der Spannungspfad τ_{xy_mit} geschlossen ist, ist dies auch für den Spannungspfad von R_M zu fordern. Die notwendigen Sprünge sind – wegen Bild 4 – dort zu erwarten, wo R_M und $R_{M_neg}^\circ$ den kleinsten Abstand haben, was dann auch der Algorithmus so liefert. Letztlich bleibt noch die Frage, welches der beiden Maxima von R_M° nach unten zu klappen ist und welches Maximum als Fixpunkt im Klappprozess fungieren kann. Die Entscheidung ergibt sich aus Bild 5: Das rechte Maximum ist zum Fixpunkt zu machen und das linke herunterklappen, weil der durch den Klappprozess entstehende R_{M_pfad} in seinem Verlauf sich dann über weite Strecken an den Spannungspfad τ_{xy_mit} anschmiegt.

Einführung des Referenzpunktes 1. Um beide Maxima getrennt ansprechen zu können, wird das Fixpunkt-Maximum als **1. Maximum vom R_M°** bezeichnet – und das andere als **2. Maximum von R_M°** . Das 1. Maximum soll zum Zeitpunkt t_1 bzw. $\eta_1 = \omega_1 \cdot t_1$ erreicht werden. Die zugehörigen Spannungskomponenten ($\sigma_x(\eta_1)$, $\sigma_y(\eta_1)$, $\tau_{xy}(\eta_1)$) kennzeichnen den Fixpunkt des Klappprozesses. Dieser Fixpunkt wird als **Referenzpunkt 1** bezeichnet.

Der Referenzpunkt 1 [mit den Spannungskomponenten ($\sigma_x(\eta_1)$, $\sigma_y(\eta_1)$, $\tau_{xy}(\eta_1)$)] bestimmt zusammen mit dem Referenzpunkt 0 [mit den Spannungskomponenten ($\sigma_x(\eta_0)$,

Beispiel 2	Referenzpunkt 0 bei Maximum von σ°_1 ($\sigma^{\circ}_{1,max} =$ 629 MPa)	Gegenpunkt 0 bei Minimum von σ°_2 ($\sigma^{\circ}_{2,min} =$ -41.6 MPa)	Referenzpunkt 1 bei 1. Maximum von R°_M ($R^{\circ}_{M,min} =$ 412.MPa)	Gegenpunkt 1 bei 2. Maximum von R°_M ($R^{\circ}_{M,min} =$ 412 MPa)
$\Delta\sigma_{xy}$	129.1	-129.1	104.5	-104.5
τ_{xy}	379,3	-379.3	398.8	-398.8
R°_M	400.7	400.7	412.2	412.2
Zeitvariable η	1.108	-2.033	0.864	-2.278

Tabelle 1

Referenz- und Gegenpunkte mit Spannungen [in MPa] und Zeitvariable η [in rad]

	σ_{xa1}	δ_{x1}	σ_{xa2}	δ_{x2}	σ_{ya1}	δ_{y1}	σ_{ya2}	δ_{y2}	τ_{xya1}	δ_{xy1}	τ_{xya2}	δ_{xy2}
Beispiel 3	200	0	150	0	100	$-\pi/8$	75	$-\pi/4$	200	$-\pi/4$	150	$-\pi/2$
Beispiel 4	150	0	50	0	-150	0	-50	0	150	$\pi/4$	50	$\pi/8$

Tabelle 2

Nichtproportionale Spannungskomponenten [in MPa] und Phasenwinkel [in rad]

$\sigma_y(\eta_0), \tau_{xy}(\eta_0)$ – siehe Abschnitt 4, Vereinbarung 2 – den Vorzeichenalgorithmus.

Nach Vereinbarung 3 gilt: $\sigma_x(\eta_0) \geq 0, \sigma_x(\eta_0) \geq \sigma_y(\eta_0)$ sowie $\tau_{xy}(\eta_0) \geq 0$. Damit lässt sich auch das 1. Maximum von R°_M nicht nur entsprechend Bild 5, sondern auch formal festlegen. Da das 1. Maximum, das den Referenzpunkt 1 definiert, nicht nach unten geklappt werden soll, ist von den beiden Maxima von R°_M dasjenige das 1. Maximum, dessen zugeordneter Hauptachsenwinkel $2 \cdot \varphi_0(\eta_1)$ dichter beim Hauptachsenwinkel $2 \cdot \varphi_0(\eta_0)$ liegt.

Konzept zur Vorzeichenzuweisung. Nur eine enge Verknüpfung der beiden Referenzpunkte führt zu einem eindeutigen Vorzeichenalgorithmus. Mit Bild 6 sollen nun die dazu notwendigen Schritte erläutert werden. Das Achsenkreuz ist das gleiche wie zu Bild 5.

Der Referenzpunkt 1 liegt definitionsgemäß auf einem Kreis mit dem Radius $R^{\circ}_{M,max}$. Der ihm zugeordnete Gegenpunkt 1 ebenfalls. Beide Punkte definieren den Referenzstrahl 1, auf dem die Linie AB senkrecht steht. Der Referenzstrahl 0 wird durch die Spannungskomponenten ($\sigma_x(\eta_0), \sigma_y(\eta_0), \tau_{xy}(\eta_0)$) und den Ursprung des Koordinatensystems definiert. Der Schnittpunkt des Referenzstrahls 0 mit dem äußeren Kreis definiert den Referenzpunkt „0“. Dieser Punkt muss entsprechend Abschnitt 4 im 1. Quadranten liegen. Die Komponenten des Gegenpunkts „0“ sind damit beide negativ. Der Gegenpunkt 1 ist mit diesem Gegenpunkt „0“ automatisch eng verknüpft, so wie der Referenzpunkt 1 mit dem Referenzpunkt „0“. Beide Gegenpunkte sind sichere Kandidaten für das Herunterklappen. Damit lässt sich der Gegenpunkt 1 als heruntergeklapptes 2. Maximum von R°_M identifizieren. Wegen der Antimetrie

der Gln. 16 muss das 2. Maximum von R°_M beim Herunterklappen genau die Hälfte aller Punkte des Spannungspfads $\tau_{xy,mit}$ nach Bild 5 mitnehmen, verallgemeinert eine halbe Kreisringfläche. Diese horizontal (hellgrün) schraffierte halbe Kreisringfläche wird schließlich noch durch die Gerade AB abgeschlossen, die wegen der Symmetrien von R°_M nach Bild 4 sinnvoll nur senkrecht auf der Verbindungslinie von Referenzpunkt 1 (1. Maximum von R°_M) und Gegenpunkt 1 (2. Maximum von R°_M) stehen kann. Der Referenzpunkt 1 hält dagegen zusammen mit dem Referenzpunkt 0 die vertikal (helltürkis) schraffierte halbe Kreisringfläche fest.

In Tabelle 1 werden einige Daten zu Beispiel 2 zusammengestellt. Bemerkenswert ist, dass der diametrale Gegenpunkt 0 nicht durch das Minimum von σ°_1 , sondern das Minimum von σ°_2 bestimmt wird.

Die jeweiligen Achsenpunkte η , zwischen denen das garnierartige Herunterklappen der Bereiche in Abb. 4 stattfinden kann, werden in unserem Beispiel zwischen den aufeinanderfolgenden Maxima von R°_M liegen – und wegen der vielfältigen Symmetrien von $R^{\circ}_M(\eta)$ nach Bild 4 – wie bereits ausgeführt – sogar genau in der jeweiligen Mitte.

Der Vorzeichenalgorithmus. Die den Achsenpunkten η zugeordneten Achsenpunkte in Bild 6 liegen auf der Geraden AB. Für die Koordinaten der Punkte A und B gilt wegen der Orthogonalität der Geraden AB zur Verbindungslinie von Referenzpunkt 1 und Gegenpunkt 1:

$$(\Delta\sigma_{xyA}, \tau_{xyA}) = (-\tau_{xy}(t_1), \Delta\sigma_{xy}(t_1)) \quad (17)$$

$$\text{und } (\Delta\sigma_{xyB}, \tau_{xyB}) = (\tau_{xy}(t_1), -\Delta\sigma_{xy}(t_1)).$$

Die Gerade AB lässt sich dann durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$\Delta\sigma_{xy} \cdot \tau_{xyA} - \tau_{xy} \cdot \Delta\sigma_{xyA} = 0 \Rightarrow \quad (18)$$

$$\Delta\sigma_{xy} \cdot \Delta\sigma_{xy}(t_1) + \tau_{xy} \cdot \tau_{xy}(t_1) = 0.$$

Alle Spannungspunkte ($\Delta\sigma_{xy}, \tau_{xy}$), die sich rechts oberhalb der roten Linie AB befinden, behalten ihre Vorzeichen; alle Spannungspunkte unterhalb der Linie AB müssen dann beide Vorzeichen umdrehen. Die gesuchte Vorzeichenfunktion lässt sich nun mittels Gl. 18 formulieren. Es ergibt sich für den Invariantenpfad $R_M(\eta)$ eine einfach zu handhabende Gleichung, wie Gl. 19 zeigt:

$$R_M(\eta) = [\text{signum}(\Delta\sigma_{xy}(\eta) \cdot \Delta\sigma_{xy}(\eta_1) + \tau_{xy}(\eta) \cdot \tau_{xy}(\eta_1))] \cdot R_M(\eta) \quad (19)$$

Die Gl. (19) enthält explizit die Spannungskomponenten $\Delta\sigma_{xy}(\eta)$ und $\tau_{xy}(\eta)$ und gleichzeitig die des Referenzpunkt 1 bezogen auf dasselbe Koordinatensystem. Mittels einer Koordinatentransformation auf ein beliebiges anderes Koordinatensystem, beispielsweise auf ein Koordinatensystem, in dem der Referenzpunkt 1 zum Zeitpunkt t_1 die Koordinaten $\Delta\sigma_{xy} = R^{\circ}_{M,max}$ und $\tau_{xy} = 0$ hat, lässt sich zeigen, dass der Vorzeichenalgorithmus wieder $R_M(\eta)$ ergibt.

Das Ergebnis der beschriebenen Verfahrensweise zur Vorzeichenzuweisung für Beispiel 2 wurde in Bild 4 bereits gezeigt. Weiter gilt

$$M_M(\eta) = M^{\circ}_M(\eta) \quad (20)$$

6.2 Überlagerung von Schwingbeanspruchungen mit unterschiedlicher Frequenz

Gl. 19 hängt nur noch von den zeitveränderlichen Spannungskomponenten $\Delta\sigma_{xy}(\eta), \tau_{xy}(\eta)$, vom Spannungspfad $R^{\circ}_M(\eta)$ und entscheidend von den Spannungen des Referenzpunktes 1 $\Delta\sigma_{xy}(\eta_1)$, und $\tau_{xy}(\eta_1)$ ab, weshalb diese Gleichung auch für überlagerte Schwingbeanspruchungen angewendet werden kann. Der Gegenpunkt 1 wird dabei nicht mehr mit dem 2. Maximum von $R^{\circ}_M(\eta)$ zusammenpassen. Dies ist aber unschädlich, da der Gegenpunkt zwar zum Verständnis wichtig war, aber in der Gl. 19 nicht vorkommt. Der Referenzpunkt 1, der bezüglich des Hauptachsenwinkels möglichst dicht beim Referenzpunkt 0 liegt, wird damit zum Angelpunkt der Vorzeichenzuweisung

Ziel der folgenden Ausführungen wird es sein, zu zeigen, dass die beiden letzten Gleichungen – Gl. 19 und Gl. 20 – auch auf Schwingungsgemische sinnvoll angewendet werden können, wenn eventuelle Mehrdeutigkeiten oder gewisse Ungenauigkeiten, die sich bei überlagerten Schwingbeanspruchungen leicht ergeben können, hinsichtlich des Referenzpunktes 0 und des daran gekoppelten Referenzpunktes 1 aufgedeckt und

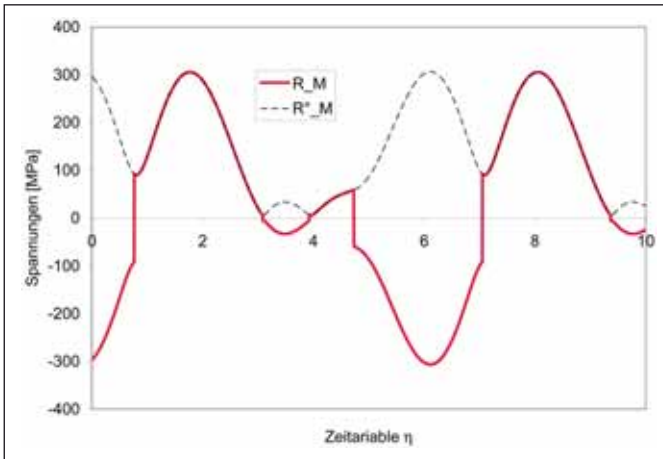


Bild 7a

Verläufe von R_M sowie R^*_M in Abhängigkeit von der Zeitvariablen $\eta = \omega \cdot t$

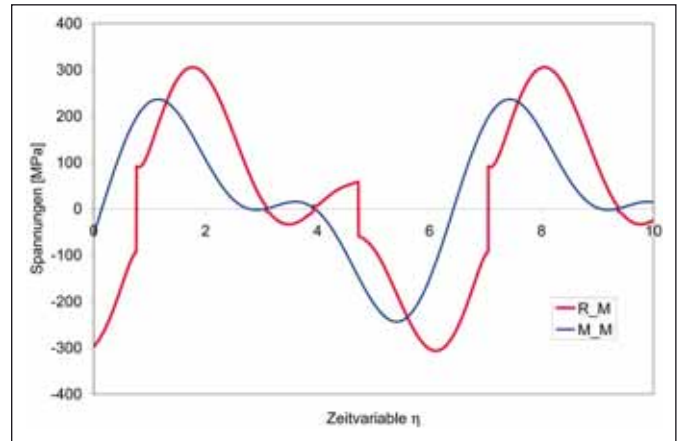


Bild 7b

Verläufe von $M_M(\eta)$ sowie $R_M(\eta)$ in Abhängigkeit von der Zeitvariablen η

sachgerecht weiterverarbeitet werden. Dies wird in diesem Beitrag am Beispiel folgender Beanspruchungsverläufe demonstriert:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{xa1} \cdot \sin(\eta + \delta_{x1}) + \sigma_{xa2} \cdot \sin(2\eta + \delta_{x2}) \quad (21) \\ \sigma_y &= \sigma_{ya1} \cdot \sin(\eta + \delta_{y1}) + \sigma_{ya2} \cdot \sin(2\eta + \delta_{y2}) \\ \tau_{xy} &= \tau_{xya1} \cdot \sin(\eta + \delta_{xy1}) + \tau_{xya2} \cdot \sin(2\eta + \delta_{xy2}). \end{aligned}$$

Es werden zwei Beispiele diskutiert, die alle in Abschnitt 4 formulierten Vereinbarungen erfüllen. Dadurch wird die Eindeutigkeit des jeweiligen Referenzpunkts 0 sichergestellt.

In Tabelle 2 sind die verwendeten Daten zu den verschiedenen Spannungen und Phasenverschiebungen für zwei Beispiele zusammengestellt.

Beispiel 3: Bild 7a zeigt die Verläufe von R_M sowie R^*_M in Abhängigkeit von der Zeitvariablen $\eta = \omega \cdot t$. Es wird etwas mehr als eine Wiederholperiode dargestellt.

Es ist zu erkennen, dass $R^*_M(\eta)$ – gestrichelte Kurve – das Auf und Ab eines Schwingungsverlaufs nicht vorzeichenrecht wiedergeben kann. Insbesondere wird die Spannweite der Schwingung halbiert. Die Oberschwingungen der Spannungskomponenten in Gl. 21 führen zu einer Erhöhung der Extremwerte. Zusätzlich treten Vorzeichenverluste dann auf, wenn die Oberschwingungen beim Abstieg von $R_M(\eta)$ die Nulllinie passieren.

Bild 7b zeigt die zugehörigen Verläufe von $M_M(\eta)$ sowie $R_M(\eta)$ in Abhängigkeit von der Zeitvariablen η . Die von Vorzeichenverlusten nicht betroffene $M_M(\eta)$ -Kurve zeigt ein sehr ähnliches Verhalten. Es tritt ein leichter Phasenversatz zwischen beiden Verläufen auf. Die für nichtproportionale Beanspruchungen unvermeidbaren Sprünge werden durch die Oberschwingungen nach Gl. 21 beeinflusst. Die Sprünge treten nicht mehr alle an den Minima von $R^*_M(\eta)$ auf. Auch die vorwiegend durch die Grundschiwingung bestimmten Minima liegen nicht mehr exakt in den Minimalstellen von $R_M(\eta)$.

Wichtiger Hinweis: Die positiven und negativen maximalen Schwingungsauslässe von $R_M(\eta)$ erweisen sich in diesem Beispiel 3 als nahezu gleich. Im Sinne von Bild 4 ist nicht von vorneherein sicher, dass das größere Maximum von $R^*_M(\eta)$ automatisch zum 1. Maximum wird. Es gilt weiter: *Von den beiden Maxima von R^*_M ist dasjenige das 1. Maximum, dessen zugeordneter Hauptachsenwinkel $2 \cdot \varphi_0(\eta_1)$ dichter beim Hauptachsenwinkel $2 \cdot \varphi_0(\eta_0)$ liegt. Diese Regel gilt damit grundsätzlich. Hilfreich zur Festlegung oder zur Kontrolle ist eine gemeinsame graphische Darstellung der Hauptspannung $\sigma^{\circ}_1(\eta)$, des Mohrschen Radius $R^{\circ}_M(\eta)$ und des mit der atan2-Funktion bestimmten Hauptachsenwinkels $\varphi_0(\varphi)$ über der Zeitvariablen η .*

Beispiel 4. Das Beispiel ist so konstruiert, dass die Mittelpunktsinvariante $M_M(\eta)$ zu Null wird. Es gilt $\sigma^{\circ}_1(\eta) = -\sigma^{\circ}_2(\eta) = R^{\circ}_M(\eta)$. Damit fallen der Referenzpunkt 0 und der Referenzpunkt 1 zusammen.

Bild 8 zeigt die Verläufe von $R_M(\eta)$ und $R^{\circ}_M(\eta)$ sowie $M_M(\eta)$ in Abhängigkeit von der Zeitvariablen $\eta = \omega \cdot t$. Es wird wieder etwas mehr als eine Wiederholperiode dargestellt. Es gilt auch hier, dass $R^{\circ}_M(\eta)$ den Schwingungsverlauf nicht vorzeichenrecht wiedergibt.

Die Oberschwingungen haben einen deutlichen Einfluss auf die Verläufe vom $R^{\circ}_M(\eta)$ und $R_M(\eta)$. Die Sprünge erfolgen nicht mehr in der Nähe des Minimums von $R^{\circ}_M(\eta)$, eher in der Nähe der Zwischenminima. Die Radien der Mohrschen Kreise schwingen nur begrenzt, wodurch die Sprünge sehr groß werden müssen. *Das Schwingungsgeschehen wird dominant durch die rotierenden Hauptachsen bestimmt.* Bemerkenswert ist, dass die Schwingungsauslässe nach oben und unten nicht mehr symmetrisch ausfallen: Der Betrag von $R_{M,o}$ ist wesentlich größer als derjenige von $R_{M,u}$.

Während in Beispiel 3 durch die Oberschwingungen alle Maxima von $R^{\circ}_M(\eta)$ er-

höht werden, ist diese in Beispiel 4 nicht mehr der Fall. Ein Maximum wird erhöht und das andere erniedrigt. Letzteres wird dadurch zum Minimum von $R^{\circ}_M(\eta)$, wodurch beim Herunterklappen eines der Zwischenmaxima von $R^{\circ}_M(\eta)$ den größten negativen Schwingungsausschlag von $R_M(\eta)$ bestimmt.

Nachtrag zum Vorzeichenalgorithmus.

Der Betrag des Schwingungsauslags R_M , 0 ist größer als der Betrag des Schwingungsauslags $R_{M,u}$. Und genau dieser Fall wurde in Abschnitt 4 für die Entwicklung des Vorzeichenalgorithmus festgelegt, – und so wäre alles in Ordnung. Da aber ausgeschlossen werden soll, dass eventuell in einem anderen Beispiel ein Zwischenmaximum den Referenzpunkt 0 definiert, wird ein Prüfkriterium in den Vorzeichenalgorithmus eingebaut. Danach darf der Vorzeichenalgorithmus nur dann angewendet werden, wenn für das Asymmetrie-Prüfkriterium Q_A gilt

$$Q_A = R_{M,o} / |R_{M,u}| \geq 1. \quad (22)$$

Ist dies nach Durchführung der Vorzeichenzuweisung nicht der Fall, so ist die Vorzeichenzuweisung zu wiederholen. Hierzu sind zunächst alle Vorzeichen von $\sigma_x(t)$, $\sigma_y(t)$ und $\tau_{xy}(t)$ durch Multiplikation mit (-1) umkehren, danach ist der Algorithmus erneut anzuwenden; schließlich sind durch eine weitere Multiplikation mit (-1) die Spannungskomponenten zurückzusetzen.

Fazit: Die Komplexität einer eindeutigen Vorzeichenzuweisung erfordert einen ausgefeilten Algorithmus, der in diesem Kapitel für die Überlagerung von zwei Schwingbeanspruchungen mit unterschiedlichen Frequenzen verdeutlicht wurde. Durch die formale Einführung eines vorzeichenbehafteten Mohrschen Radius gelingt eine Visualisierung des Schwingungsgeschehens, das sich an den Schwingungscharakter der Spannungskomponenten anlehnt. Insbesondere wird das Frequenzverhalten der Span-

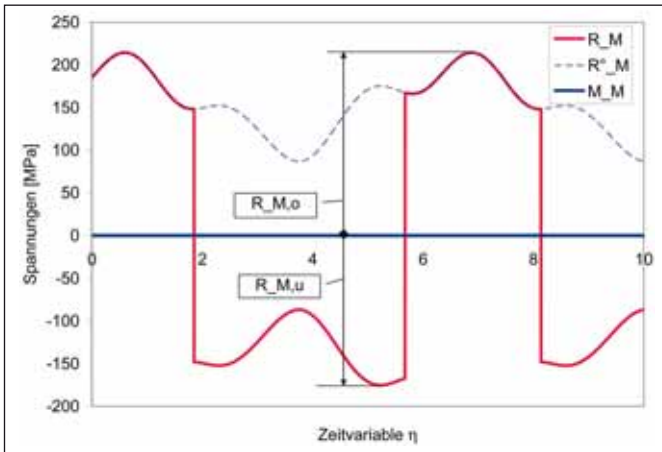


Bild 8

Verläufe von $R_M(\eta)$, $R^o_M(\eta)$ sowie $M_M(\eta)$ in Abhängigkeit von der Zeitvariablen η

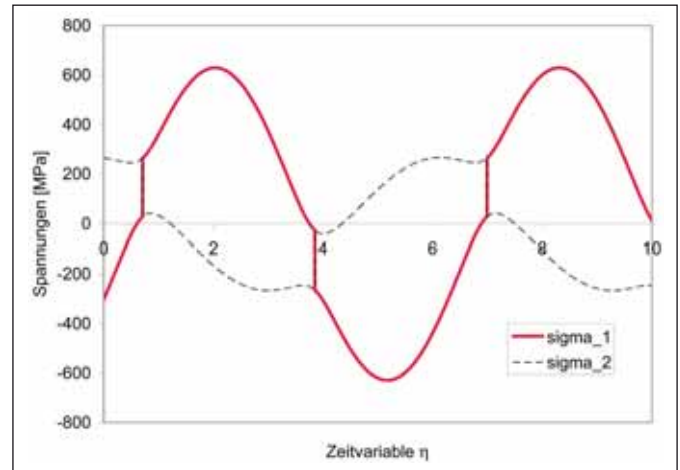


Bild 9

Normalspannungshypothese $\sigma_{v,NH} = \sigma_1(t) = (\sigma_1)$ und $\sigma_2(t) = (\sigma_2)$

nungskomponenten nicht verfälscht. Bei der Visualisierung des vorzeichenbehafteten Mohrschen Radius, der durch die zeitabhängige Spannungs-Invariante $R_M(t)$ repräsentiert wird, entsteht eine zusammenhängende Invarianten-Bahnkurve, die den größten positiven und den größten negativen Radius miteinander verbindet und damit die größte Invarianten-Schwingweite aufdeckt. Auch die Schwingungen zwischen den Extremwerten werden in ihrer vollen Schwingbreite sichtbar. Die bei nichtproportionalen Beanspruchungen auftretenden Sprünge von $R_M(t)$ repräsentieren die Zusammengehörigkeit der positiven und negativen Invariantenbereiche. Sie visualisieren auch einen gleichzeitigen Platztausch der konventionellen Hauptspannungen $\sigma_1(t)$ und $\sigma_2(t)$. Als weitere Invariante wurde der zeitveränderliche Mittelpunkt $M_M(\eta)$ der Mohrschen Kreise eingeführt, der grundsätzlich keine Sprünge zeigt, wenn die Spannungs-komponenten stetig sind.

Ausblick. Die obigen Beispiele zeigen, dass der Vorzeichenalgorithmus für überlagerte proportionale und nichtproportionale Schwingbeanspruchungen eingesetzt werden kann. Der Nachweis wurde anhand von zwei Beispielen gezeigt. Grundsätzlich fehlt noch der Nachweis für komplexere Beanspruchungsverläufe. Hierzu ist der Vorzeichenalgorithmus weiterzuentwickeln.

Es stellt sich jedoch die Frage, ob nicht für die praktische Anwendung der hier beschriebene Vorzeichenalgorithmus ausreichend genau ist, da in der derzeitigen Praxis mit zum Teil deutlich ungenaueren Näherungen gearbeitet wird, siehe Hinweis in Abschnitt 7.2, Spalte 3.

Da bei Dauerfestigkeitsberechnungen und Berechnungen im Übergangsbereich zur Zeitfestigkeit lediglich die größten Invariantenschwingbreiten gebraucht werden, ist der derzeitige Algorithmus für solche Berechnungen mit Sicherheit ausreicht genau. Für Betriebs-

festigkeitsberechnungen kann man sich zumindest einen ersten Überblick verschaffen. Bleiben Zweifel, so wird empfohlen, denjenigen Punkt als Referenzpunkt 0 auszuwählen, für den die Invariante $R_M(t)$ die größten Spannungsschwingbreiten generiert.

Um auch für Betriebsfestigkeitsberechnungen, bei denen bekanntlich die Beanspruchungen unter Dauerfestigkeitsgrenze nicht mehr vernachlässigt werden dürfen, die Genauigkeit zu steigern, ist geplant, Beanspruchungsverläufe, die durch Fourierreihen dargestellt werden können, in den Vorzeichenalgorithmus einzubinden. Bei der Entwicklung ist ein besonderes Augenmerk auf die richtige Auswahl der beiden Referenzpunkte zu legen, da der derzeitige Algorithmus noch nicht auf mehrfach auftretende Maxima eindeutig reagiert. Solche Mehrdeutigkeiten können beispielsweise dann entstehen, wenn sich im Gipfelbereich der höchsten Spannungen von $\sigma_1(t)$ und $R^o_M(t)$ Spannungsdellen (analog Bild 8 für neg. R_M) oder auch Spannungsplateaus ausbilden. Je genauer die Sprungstellen festgelegt werden sollen, umso aufwendiger wird der Algorithmus. Bei der Weiterentwicklung des Algorithmus zur Festlegung der Referenzpunkte ist es sicher nicht notwendig, alle Feinheiten von $\sigma_1(t)$ sowie $R^o_M(t)$ in den Blick zu nehmen, vielmehr ist eine Orientierung an einer die Feinwelligkeit überbrückenden „Hüllkurve im Bereich der Maxima“ sinnvoll. Bei einer Plateaubildung im Gipfelbereich kann es sinnvoll sein, durch kleine Änderungen in den Spannungs-komponenten den Plateaubereich aufzulösen.

7 Vergleichsspannungs-Zeitverläufe und Festigkeitshypothesen

Nach der Festlegung beider Referenzpunkte ist grundsätzlich der Weg frei, die bewährten Festigkeitshypothesen für pro-

portionale Schwingbeanspruchungen so umzugestalten, dass auch nichtproportionale Beanspruchungen damit beurteilt werden können, was im weiteren nur noch angedeutet werden kann und im Detail in einer weiteren Veröffentlichung darzulegen ist.

Ziel ist es jeweils, eine zeitabhängige Vergleichsspannungs-Zeitfunktion zu formulieren, die später für einen Dauer- bzw. Ermüdungsfestigkeitsnachweis verwendet werden kann. Um nicht im Allgemeinen zu bleiben, sollen die hier diskutierten Vergleichsspannungshypothesen als Grenzfälle die bewährten Festigkeitshypothesen für proportionale Beanspruchungen enthalten.

7.1 Modifizierte Normalspannungshypothese

In diesem Abschnitt wird als Hypothese die einfachste, mit den beiden Invarianten $M_M(t)$ und $R_M(t)$ formulierbare Vergleichsspannung in Anlehnung an die konventionelle Normalspannungs-Hypothese (NH-Hypothese) untersucht.

$$\sigma_{v,NH}(t) = \sigma_1(t) = M_M(t) + R_M(t) \quad (23)$$

Um den Anschluss zur NH-Hypothese bei proportionalen Beanspruchungen herzustellen, werden die Spannungs-komponenten $\sigma_x(t)$, $\sigma_y(t)$ und $\tau_{xy}(t)$ mit den Gln. (7) sowie den Invarianten nach Gln. (9) in Gl. 23 eingesetzt. Der Einfachheit halber gelte

$$\begin{aligned} \sigma_{x,max} &= \sigma_x(t_0), \sigma_{y,max} = \\ &= \sigma_y(t_0) \text{ und } \tau_{xy,max} = \tau_{xy}(t_0), \end{aligned}$$

wobei daran erinnert wird, dass die Spannungs-komponenten vorher so umzuordnen sind, dass gilt: $\sigma_{x,max} > 0$, $\sigma_{x,max} \geq \sigma_{y,max}$ und $\tau_{xy,max} \geq 0$ sowie $f(t) = 1$ für $t = t_0$. Weiter soll wie bisher der Mittelwert von $f(t)$ zu Null werden. Damit folgt sofort

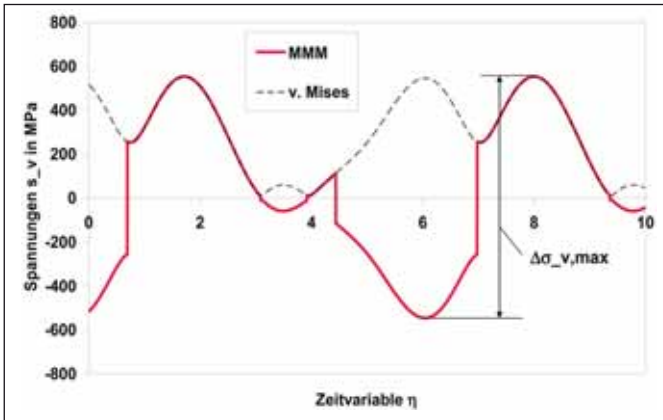


Bild 10

Vergleichsspannungsverläufe zu Beispiel 3

$$\sigma_{v,NH}(t) = f(t) \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{x,max} + \sigma_{y,max}) + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{x,max} - \sigma_{y,max})^2 + 4 \cdot \tau_{xy,max}^2} \right\}. \quad (24)$$

Es ist zu erkennen, dass der Vergleichsspannungsverlauf der Zeitfunktion $f(t)$ folgt und mit der maximalen Normalspannung für $t = t_0$ skaliert wird.

Für nichtproportionale Belastungen lässt sich im Allgemeinen keine geschlossene Formel mehr für den Vergleichsspannungsverlauf von $\sigma_{v,NH}(t)$ ableiten. Deshalb wird man sich direkt auf die numerischen Ergebnisse für $R_M(t)$ und $M_M(t)$ beziehen. Zur Demonstration wird auf Beispiel 2 zurückgegriffen.

In Bild 9 wird der Verlauf von $\sigma_{v,NH} = \sigma_1(t)$ dargestellt. Die maximale Schwingbreite von $\Delta\sigma_{v,NH} = \Delta\sigma_{1,max} = \sigma_{1,max} - \sigma_{1,min}$ lässt sich unmittelbar ablesen. Diese wird beispielsweise für Dauer- oder Zeitfestigkeitsberechnungen gebraucht. Der Verlauf von $\sigma_2(t)$ (=sigma 2) wird gezeigt, um die Koordinatenachsenwechsel an den Sprungstellen nochmals herauszustellen.

Bei der Darstellung der konventionellen Hauptspannungen $\sigma_1(\eta)$ und $\sigma_2(\eta)$ ergeben sich zwei Bahnkurven, die sich nicht berühren. Diese beiden Bahnkurven entstehen aus Bild 9, wenn die gezeichneten Sprünge entfernt werden; die obere Kurve repräsentiert dann $\sigma_1(\eta)$, die untere $\sigma_2(\eta)$. Der Gewinn, der durch die Einführung der neuen Hauptspannungen und des vorzeichenbehafteten Mohrschen Radius erzielt wird, ist aus Bild 9 deutlich zu erkennen. Nur die Hauptspannungen $\sigma_1(\eta)$ – rote Bahnkurve – visualisiert die Zeitfunktion der Vergleichsspannung $\Delta\sigma_{v,NH}(t)$ sachgemäß.

7.2 Die Modifizierte Mohr-Mises-Hypothese

Als nächstes wird eine Hypothese formuliert, die auf den vorzeichenbehafteten Mohrschen Invarianten aufbaut und die v.Mises-Hypothese (auch Gestaltänderungs-

hypothese genannt) als Sonderfall enthält. Sie wird deshalb als MMM-Hypothese (Modifizierte Mohr-Mises-Hypothese) bezeichnet. Es wird folgende Form für die Hypothese vorgeschlagen und untersucht:

$$\sigma_{v,MMM}(t) = \text{signum}(k_M \cdot M_M(t) + k_R \cdot R_M(t)) \cdot \sqrt{(k_M \cdot M_M(t))^2 + (k_R \cdot R_M(t))^2} \quad (25)$$

k_M und k_R sind positive Hypothesenfaktoren. Beispielsweise gelten für die v.Mises-Hypothese die Faktoren $k_M = 1$ und $k_R = \sqrt{3}$. Die Vorzeichenfunktion

$$V(t) = \text{signum}(k_M \cdot M_M(t) + k_R \cdot R_M(t)) \quad (26)$$

soll den durch Quadrieren und Wurzelziehen auftretenden Vorzeichenverlust von $M_M(t)$ und $R_M(t)$ sachgerechte Vorzeichen zuweisen. Dabei wird davon Gebrauch gemacht, dass die skalaren Funktionen $M_M(t)$ und $R_M(t)$ vorzeichenbehaftet sind. $V(t)$ hat danach folgende Eigenschaften:

1. Bei proportionalen Beanspruchungen wird wegen $M_M(t) = \text{signum}(f(t)) \cdot |M_M(t)|$ und $R_M(t) = \text{signum}(f(t)) \cdot |R_M(t)|$ die Funktion $V(t) = \text{signum}(f(t))$.
2. Wenn $R_M(t) = 0$, dann wird $V(t) = \text{signum}(M_M(t))$ und $\sigma_{v,MMM} = k_M \cdot M_M(t)$.
3. Wenn $M_M(t) = 0$, dann wird $V(t) = \text{signum}(R_M(t))$ und $\sigma_{v,MMM} = k_R \cdot R_M(t)$.
4. Wenn zu einem konkreten Zeitpunkt t_k sowohl $M_M(t_k) \neq 0$ als auch $R_M(t_k) \neq 0$ wirken und zusätzlich $\text{signum}(M_M(t_k)) = \text{signum}(R_M(t_k))$, so wird analog Pkt.1 $V(t_k) = \text{signum}(M_M(t_k))$, alternativ $V(t_k) = \text{signum}(R_M(t_k))$.
5. Wenn zu einem konkreten Zeitpunkt t_k sowohl $M_M(t) \neq 0$ als auch $R_M(t_k) \neq 0$ gelten, aber zusätzlich $\text{signum}(M_M(t_k)) \neq \text{signum}(R_M(t_k))$, so entscheidet über das Vorzeichen der größere der Beträge von $B_M = |k_M \cdot M_M(t_k)|$ und $B_R = |k_R \cdot R_M(t_k)|$. Wenn $B_M > B_R$, dann wird $V(t_k) = \text{signum}(M_M(t_k))$; ist dagegen $B_R > B_M$, dann wird $V(t_k) = \text{signum}(R_M(t_k))$.

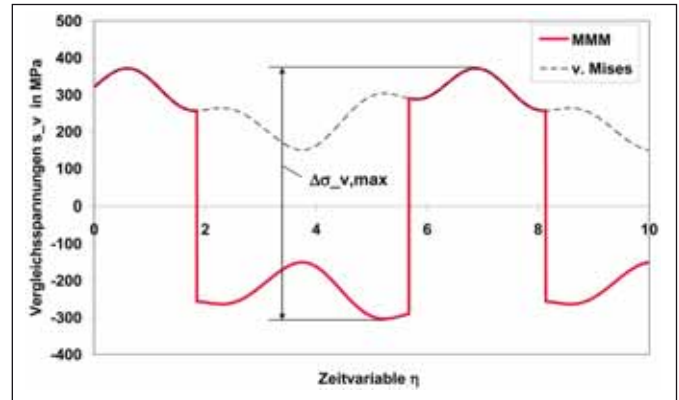


Bild 11

Vergleichsspannungsverläufe zu Beispiel 4

Hinweis: Die Vorzeichenfunktion $V(t)$ unterscheidet sich deutlich von der in Abschnitt 1 beschriebenen, häufig angewendeten Vorzeichenzuweisung für die v.Mises-Hypothese. da dort formal gleichwertig lediglich das Vorzeichen der zeitveränderlichen Invarianten $M_M(t)$ zugewiesen wird. Sofern $B_R > B_M$ nach Eigenschaft 5 zutrifft, kann diese Zuweisung sehr ungenau werden. Extrem wird der Fall, wenn Eigenschaft 3 zutrifft.

Bei proportionalen Beanspruchungen reicht die erste Bedingung zur Vorzeichenzuweisung mit $V(t) = \text{signum}(f(t))$ aus. Damit vereinfacht sich die Gl. 25 für die MMM-Hypothese – mit $k_M = 1$ und $k_R = \sqrt{3}$ entsprechend der v.Mises-Hypothese sowie den Gln. 9 zu

$$\sigma_{v,MMM}(t) = f(t) \cdot \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{x,max} + \sigma_{y,max})^2 + 3 \left[\frac{1}{4}(\sigma_{x,max} - \sigma_{y,max})^2 + \tau_{xy,max}^2 \right]} \quad (27)$$

oder

$$\sigma_v(t) = f(t) \cdot \sqrt{\sigma_{x,max}^2 + \sigma_{y,max}^2 - \sigma_{x,max} \cdot \sigma_{y,max} + 3 \cdot \tau_{xy,max}^2}$$

Der Vergleichsspannungsverlauf der MMM-Hypothese folgt der Zeitfunktion $f(t)$. Der Höchstwerte bei $f(t) = 1$ wird durch die v.Mises-Hypothese beschrieben. Damit ist der Übergang zu Dauer- und Zeitfestigkeitsberechnungen problemlos herstellbar.

Für nichtproportionale Belastungen lässt sich im Allgemeinen wieder keine geschlossene Formel für den Vergleichsspannungsverlauf der MMM-Hypothese mehr ableiten. Deshalb wird man direkt mit den numerischen Ergebnissen für $R_M(t)$ und $M_M(t)$ arbeiten. Zur Demonstration wird auf Beispiel 3 in Bild 10 und Beispiel 4 in Bild 11 Bezug genommen.

In den Bildern wird jeweils die Verläufe der Vergleichsspannungen $\sigma_{v,v,Mises}(\eta)$ und $\sigma_{v,MMM}(\eta)$ dargestellt.

Für Beispiel 3 sind die Verläufe von $R_M(\eta)$ und $M_M(\eta)$ sehr ähnlich – siehe Bild 7b. Deshalb unterscheidet sich der Verlauf der Vergleichsspannung nach der MMM-

Hypothese nach Bild 10 kaum vom Verlauf der Invarianten.

Im Beispiel 4 ist nur der Verlauf von $R_M(t)$ wirksam, da $M_M(\eta) = 0$ ist, siehe Bild 8. Deshalb ist Verlauf der Vergleichsspannung nach der MMM-Hypothese nach Bild 11 bis auf den Faktor $k_R = \sqrt{3}$ identisch mit Bild 8. Die vorzeichenlose v.Mises-Hypothese ist für nichtproportionale Beanspruchungen nicht akzeptabel.

Die maximale Schwingbreite $\Delta\sigma_{v,max} = \sigma_{v,max} - \sigma_{v,min}$, die beispielsweise für eine Dauerfestigkeitsbewertung gebraucht wird, lässt sich unmittelbar ablesen. Da die MMM-Hypothese auch eine Rainflow-Zählung des Schwingungsverhaltens erlaubt, bietet sich der Einsatz der MMM-Hypothese für Ermüdungsfestigkeitsberechnungen an.

7.3 Weitere Hypothesen

Die zeitabhängigen Spannungs-Zeit-Verläufe $R_M(t)$ und $M_M(t)$ erlauben es, auch noch weitere Hypothesen, die in der Praxis für proportionale Beanspruchungen Bedeu-

tung gewonnen haben, so auszubauen, dass sie auch für nichtproportionale Beanspruchungen anwendbar und von vorneherein invariant gegen Koordinatentransformationen sind. Dies soll in einer folgenden Publikation erfolgen, wobei auch das Schwingfestigkeitsverhalten der Bauteile in Anlehnung an [4] mit einbezogen wird.

Literatur

- [1] Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau, 22. Auflage, Springer-Verlag Berlin 2007.
 [2] Mertens H.: Zur Formulierung von Festigkeitshypothesen für mehrachsige phasenverschobene Schwingbeanspruchungen. Z. angew. Math. Mech. 70 (1990) 4, T 327/329.
 [3] Dittmann, K.-J.: Ein Beitrag zur Festig-

keitsberechnung für Bauteile aus Stahl unter mehrachsiger synchroner Beanspruchung. Technische Universität Berlin, Dissertation D83 (1991).
 [4] Hahn, M.: Festigkeitsberechnung und Lebensdauerabschätzung für metallische Bauteile unter mehrachsig schwingender Beanspruchung. Technische Universität Berlin,

- Dissertation D 83, Wissenschaft und Technik Verlag, Berlin (1995)
 [5] Mourier, Ch.: Nennspannungsunabhängige Lebensdauervorhersage auf der Grundlage linearer Finite-Elemente-Methode Berechnungen. Technische Universität Berlin, Dissertation D83 (2002).
 [6] Mertens, H.; Linke, A.: Berechnung von Bauteilwöhlerlinien für Nennspannungskonzepte. in: „Betriebsfestigkeit – Neue Entwicklungen bei der Lebensdauerberechnung von Bauteilen“ Berichtsband der DVM/FKM/VDI-Tagung in Fulda 20. März 2003 Hrsg. Deutscher Verband für Materialfor-

- schung und -prüfung, Berlin 2003.
 [7] Haibach, E.: Betriebsfestigkeit: Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung, 3., korrigierte und ergänzte Auflage. Springer-Verlag Berlin 2006.
 [8] Lelièvre, R.; Wölfle, F.: Introducing a radically improved 3D-Crank Train Simulation Process; 5th International SIMDRIVE User Meeting & Conference, 18./19. June BERLIN 2009
 [9] FKM-Richtlinie: Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile aus Stahl, Eisenguss- und Aluminiumwerkstoffen. 5., erweiterte Ausgabe, Frankfurt am Main: VDMA Verlag 2003